

## ОБЩА УСТОЙЧИВОСТ НА СТОМАНЕНИ ГРЕДИ ПРИ ОГЪВАНЕ

Любомир Здравков<sup>1</sup>

Университет по Архитектура, Строителство и Геодезия – София

## LATERAL – TORSIONAL BUCKLING OF STEEL BEAMS

Lyubomir Zdravkov

University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy - Sofia

**Abstract:** Beams are structural elements subjected to bending loads transverse to its longitudinal axis. For steel beams, which compressed flange is not laterally restrained, checking loss of overall stability is often authoritative in determining their section.

In engineering practice are known various approaches to verify the assurance of the steel beam against lateral-torsional buckling. In this article will be pay attention to the methods and their characteristics, described in actual version of the European standard EN1993-1-1.

**Key words:** steel beams, lateral-torsional buckling, critical bending moment, FEA

Гредите са конструктивни елементи, подложени на огъване от товари, напречни на тяхната надлъжна ос. При стоманени греди, чиито натиснат пояс не е странично укрепен, проверката за загуба на обща устойчивост (измятане), често се оказва меродавна при определяне на тяхното сечение.

В инженерната практика са познати различни подходи за проверка на осигуреността на стоманеното сечение срещу измятане. В тази статия ще бъде обърнато внимание на методиките, и техните особености, описани в актуалната към момента редакция на европейския стандарт EN1993-1-1 [2].

### 1. Носимоспособност на стоманени греди при загуба на устойчивост. Общ случай.

Съгласно актуалната версия на стандарт EN 1993-1-1 [2], странично неукрепен елемент, подложен на огъване спрямо “силната” ос "y-y", се проверява за загуба на устойчивост (измятане) по следния критерий:

$$(1.1) \quad M_{y,Ed} \leq M_{b,Rd}$$

където:

$M_{y,Ed}$  е изчислителната стойност на огъващия момент;

$M_{b,Rd}$  - изчислителната носимоспособност на огънат елемент при загуба на обща устойчивост. Определя се по формулата:

$$(1.2) \quad M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot W_y \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

---

<sup>1</sup> Любомир Здравков, доц. д-р инж., УАСГ, София 1046, бул. „Христо Смирненски” №1, корпус «Б», ет. 7, каб. 733, e-mail: [zdravkov\\_fce@uacg.bg](mailto:zdravkov_fce@uacg.bg)

В КОЯТО:

$\chi_{LT}$  е коефициент на загуба на устойчивост на елемент, подложен на огъване;

$f_y$  – характеристичната стойност на границата на провлачане на стоманата;

$\gamma_{M1}$  – коефициент за носимоспособност на елементи при загуба на устойчивост;

$W_y$  е съпротивителният момент на сечението спрямо ос “y-y”:

$W_y = W_{pl,y}$  е съответстващият на натиснатия пояс пластичен съпротивителен момент, когато сечението на гредата е клас 1 или 2;

=  $W_{el,y}$  е съответстващият на натиснатия пояс еластичен съпротивителен момент, когато сечението на гредата е клас 3;

=  $W_{eff,y}$  е съответстващият на натиснатия пояс ефективен съпротивителен момент, когато сечението на гредата е клас 4.

За елементи с постоянно напречно сечение, подложени на огъване, стойностите на  $\chi_{LT}$  за съответната условна стройност  $\bar{\lambda}_{LT}$  се определят съгласно формулите:

$$(1.3) \quad \chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1,0,$$

където:

$$(1.4) \quad \Phi_{LT} = 0,5 \cdot [1 + \alpha_{LT} \cdot (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2],$$

В КОЯТО:

$\alpha_{LT}$  е коефициент за несъвършенства, определен от стандарт EN1993-1-1 [2];

$M_{cr}$  - критичният момент в еластичен стадий при измятане. Определя се с характеристиките на брутното напречно сечение.

$$(1.5) \quad \bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_y \cdot f_y}{M_{cr}}}$$

В окончателната версия на EN1993-1-1 от 2005 г, аналитичната методика за определяне на критичният момент  $M_{cr}$  в еластичен стадий при измятане, е отпаднала. Там се препоръчва неговото определяне да се извършва чрез утвърдени методи, като например метод на крайните елементи (МКЕ).

## 2. Опростени методи за греди с укрепвания в сгради

Тъй като определянето на  $M_{cr}$  явно е тежък и продължителен процес, в EN1993-1-1 е дадена възможност проверката за обща загуба на устойчивост да бъде извършена по опростени методи. Съгласно тези методи, не е необходимо гредите да бъдат проверявани за измятане, когато при дължина между страничните укрепвания  $L_c$ , стройността  $\bar{\lambda}_f$  на еквивалентния натиснат пояс удовлетворява условието:

$$(2.1) \quad \bar{\lambda}_f = \frac{k_c \cdot L_c}{i_{f,z} \cdot \lambda_1} \leq \bar{\lambda}_{c,0} \cdot \frac{M_{c,Rd}}{M_{y,Ed}},$$

където:

$k_c$  е корекционен коефициент за стройността, отчитащ разпределение на момента между страничните укрепвания;

$L_c$  – дължината на натиснатия пояс на гредата между укрепванията;

$i_{f,z}$  е инерционният радиус спрямо по-слабата ос (ос “z-z”) на еквивалентен натиснат пояс, съставен от натиснатия пояс и 1/3 от натиснатата част на стеблото;

$\bar{\lambda}_{c,0} = 0,5$  - граничната стройност на еквивалентния натиснат пояс;

$M_{y,Ed}$  - максималната изчислителна стойност на огъващия момент спрямо ос “y-y” (“силната” ос на гредата) в рамките на укрепения участък;

$M_{c,Rd}$  - изчислителната носимоспособност на напречно сечение на огъване спрямо ос “y-y”.  
 Определя се по формулата:

$$(2.2) \quad M_{c,Rd} = W_y \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}},$$

$$(2.3) \quad \lambda_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{f_y}},$$

където:

$E = 210\,000$  МПа е модулът на еластичността на стоманата.

Когато неравенство (2.1) не е изпълнено, изчислителната носимоспособност при измятане на гредата може да приеме равна на:

$$(2.4) \quad M_{b,Rd} = k_{fl} \cdot \chi \cdot M_{c,Rd} \leq M_{c,Rd},$$

където:

$k_{fl} = 1,1$  е корекционен коефициент, отчитащ факта, че методът на еквивалентния натиснат пояс е в полза на сигурността.

$\chi$  - коефициентът на загуба на устойчивост на съставеното “Т” – сечение извън равнината на стеблото на гредата.

Срещат се случаи, когато ползвайки тази опростена методика, неравенство (2.1) е изпълнено, но определената по (2.4) стойност на  $M_{b,Rd} < M_{y,Ed}$  т.е. неравенство (1.1) не е удовлетворено. В Таблица 1 са дадени няколко такива примери. В такъв случай, възниква въпросът къде има грешка? В неравенство (2.1) или при определяне на  $M_{b,Rd}$  чрез уравнение (2.4)? За да си отговори на този въпрос, авторът е използвал общата методика на EN1993-1-1 [2] за определяне на общата устойчивост на греди при огъване. Тук ключов момент е определянето на критичния момент  $M_{cr}$ , което е извършено с аналитични и числени методи.

**Таблица 1.** Изчислителна носимоспособност на огъване  $M_{b,Rd}$  при греди, определена по опростената методика

Профил	IPE 200	IPE 240	IPE 300	IPE 360	IPN 160	IPN 220	IPN 280
разстояние $L_c$ , m	6	6,3	6,6	7,4	5	5,5	6,2
$M_{y,Ed}$ , kN.m	10	19	41,5	68	5,5	16	33
$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c \cdot L_c}{i_{f,z} \cdot \lambda_1}$	2,28	1,99	1,67	1,66	2,58	2,15	2
$\bar{\lambda}_{c,0} \cdot \frac{M_{y,Rd}}{M_{y,Ed}}$	2,47	2,16	1,69	1,68	2,77	2,27	2,14
$M_{b,Rd}$ , kN.m	8,5	17,9	40,8	67,4	4,2	13,8	30,4

### 3. Аналитично определяне на $M_{cr}$

Отпадналата аналитична методика за определяне на критичният момент  $M_{cr}$  беше посочена в предварителните версии на стандарта - prEN1993-1-1:2002 [1]. Тя е валидна за профили с 2-е оси на симетрия, имащи постоянно сечение по дължината си, каквито например са горещовалцуваните I-профили с еднакви пояси. Краищата на гредата са укрепени срещу странично преместване и е възпрепятствано тяхното посукуване. В общ вид,  $M_{cr}$  се определя по:

$$(3.1) \quad M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(k \cdot L_c)^2} \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \cdot \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L_c)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} + (C_2 \cdot z_g)^2} - C_2 \cdot z_g \right],$$

където:

$G$  е модулът на срязване на стоманата;

$k$  – коефициент на изкълчвателната дължина при измятане. Отчита възможността за завъртане на краищата на гредата в хоризонталната равнина, т.е. има ли възможност за завъртане на краищата и спрямо “слабата” ос “z-z”. Стойностите му могат да бъдат 0,5; 0,7 и 1,0 (по аналогия с натиснати пръти);

$k_w$  – коефициент на изкълчвателната дължина при измятане. Отчита възможността за депланация в краищата – дали тя е свободна или ограничена. Стойностите му са 0,5; 0,7 и 1,0;

$I_z$  – инерционният момент на гредата спрямо ос “z-z”;

$I_w$  – секториалният инерционен момент;

$I_t$  – инерционният момент на усукване на гредата;

$C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  са коефициенти, отчитащи различните форми диаграмите на огъващите моменти по дължината  $L_c$ , между точките на страничните укрепявания.

$z_g$  – разстоянието между точката на прилагане на напречния товар и центъра на срязване (на огъване).

Максималните стойности на товарите, които гредите биха могли да понесат, без да се изметнат, изчислени по съответните методики, са показани в **Таблица 2**,

в която:

$M_{c,Rd}$  е изчислителната носимоспособност на гредата на огъване, якостно;

$M_{b,Rd,1}$  - изчислителната носимоспособност на огънат елемент при загуба на устойчивост, изчислена по общата методика.  $M_{cr}$  е определена аналитично, по формула (3.1);

$M_{b,Rd,2}$  - изчислителната носимоспособност на огънат елемент при загуба на устойчивост, изчислена по опростената методика.

**Таблица 2.** Изчислителна носимоспособност на огъване  $M_{b,Rd}$  при греди, определена по общата и по опростената методика

Профил	IPE 200	IPE 240	IPE 300	IPE 360	IPN 160	IPN 220	IPN 280
разстояние $L_c$ , m	6	6,3	6,6	7,4	5	5,5	6,2
$M_{y,Ed}$ , kN.m	10	19	41,5	68	5,5	16	33
$M_{c,Rd}$ , kN.m	49,5	82,1	140,6	228,1	30,4	72,5	141,4
$M_{b,Rd,1}$ , kN.m	16,71	29,2	48,2	70,8	11,36	28,61	57,4
$M_{b,Rd,2}$ , kN.m	8,5	17,9	40,8	67,4	4,2	13,8	30,4

От решените примери се вижда, че при греди с голямо разстояние  $L_c$  между страничните опори, опростената методика е твърде строга, в сравнение с общата. От **Таблица 1** и **Таблица 2** се вижда, че щом неравенство (2.1) е изпълнено, гредата не трябва да загуби обща устойчивост.

При греди с малко разстояние  $L_c$  между страничните опори, винаги, когато е изпълнено неравенство (2.1), е изпълнено и (1.1). Примери за такива греди са показани в **Таблица 3** и **Таблица 4**.

**Таблица 3.** Максимални огъващи моменти  $M_{b,Rd}$  при греди, определени по общата и по опростената методика. Страничните укрепвания са през голямо разстояние

Профил	ІРЕ 200	ІРЕ 240	ІРЕ 300	ІРЕ 360	ІРН 160	ІРН 220	ІРН 280
разстояние $L_c$ , m	4	4,2	4,3	4,5	3	3,2	3,5
$M_{y,Ed}$ , kN.m	16	30	63	110	9,5	28,5	60
$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c \cdot L_c}{i_{f,z} \cdot \lambda_1}$	1,52	1,33	1,09	1,01	1,55	1,25	1,13
$\bar{\lambda}_{c,0} = \frac{M_{y,Rd}}{M_{y,Ed}}$	1,55	1,37	1,12	1,04	1,6	1,27	1,18
$\chi_{f,z}$	0,308	0,378	0,489	0,535	0,3	0,411	0,468
$\chi_{LT}$	0,446	0,458	0,447	0,414	0,514	0,54	0,558
$M_{c,Rd}$ , kN.m	49,5	82,1	140,6	228,1	30,4	72,5	141,4
$M_{b,Rd,1}$ , kN.m	22	37,6	62,8	94,5	15,6	39,2	78,9
$M_{b,Rd,2}$ , kN.m	16,7	34,2	75,6	134,3	10	32,7	72,8

**Таблица 4.** Максимални огъващи моменти  $M_{b,Rd}$  при греди, определени по общата и по опростената методика. Страничните укрепвания близко разположени.

Профил	ІРЕ 200	ІРЕ 240	ІРЕ 300	ІРЕ 360	ІРН 160	ІРН 220	ІРН 280
разстояние $L_c$ , m	2	2,1	2,2	2,45	1,65	1,85	2,05
$M_{y,Ed}$ , kN.m	32	61	124	203	17	50	100
$\bar{\lambda}_f = \frac{k_c \cdot L_c}{i_{f,z} \cdot \lambda_1}$	0,76	0,66	0,56	0,55	0,85	0,72	0,66
$\bar{\lambda}_{c,0} = \frac{M_{y,Rd}}{M_{y,Ed}}$	0,77	0,67	0,57	0,56	0,9	0,73	0,71
$\chi_{f,z}$	0,687	0,748	0,81	0,815	0,631	0,711	0,748
$\chi_{LT}$	0,637	0,616	0,63	0,56	0,664	0,67	0,68
$M_{c,Rd}$ , kN.m	49,5	82,1	140,6	228,1	30,4	72,5	141,4
$M_{b,Rd,1}$ , kN.m	31,5	50,6	88,6	127,7	20,2	48,6	96,2
$M_{b,Rd,2}$ , kN.m	37,4	67,5	125,2	204,5	21,1	56,7	116,3

#### 4. Числено определяне на $M_{cr}$

За оценка на получените с аналитични методи резултати, авторът е извършил и числено изследване на стоманените греди. За целта е използван програмният пакет SAP 2000 v.14 с неговата опция Buckling analysis. Изследвани са горещовалцуваните профили **ІРЕ200** и **ІРЕ300**. Те са моделирани по следния начин:

- поясите и стеблото са от черупкови (shell) елементи с дебелини, равни на посочените в стандарт EU 19-57;

- товарите са приложени по горния пояс, във възлите на черупковите елементи, симулирайки равномерно разпределен товар по гредата;

- хоризонталните опори на гредата са поставени в средата на горния пояс. Те възпрепятстват само хоризонталните премествания, перпендикулярни на оста на гредата;

- използвана е стомана S235, с характеристики, съгласно стандарт EN 10025;

- модул на еластичността на стоманата  $E = 2,1 \cdot 10^8$  kPa;

- коефициент на Поасон  $\nu = 0,3$ .

Чрез извършения Buckling analysis за различните греди са определени критичните стойности на товарите, а чрез тях – критичният огъващ момент  $M_{cr}$  в гредата. След това, по формули (1.2) ÷

(1.5) е изчислена носимоспособността на греда при загуба на обща устойчивост  $M_{b,Rd,3}$ . Резултатите са показани в Табл. 5.

**Таблица 5.** Сравняване на изчислителна носимоспособност на огъване  $M_{b,Rd}$  при греди, определени с аналитични и с числени методи.

Профил	ІРЕ 200			ІРЕ 300		
	6	4	2	6,6	4,4	2,2
разстояние $L_c$ , m	6	4	2	6,6	4,4	2,2
$M_{b,Rd,1}$ – общ метод	16,71	22	31,5	48,2	62	88,6
$M_{b,Rd,2}$ – опростен метод	8,5	16,7	37,4	40,8	73,5	125,2
$M_{b,Rd,3}$ – числен метод (МКЕ)	17,78	21,87	37,41	42,37	74,87	105,5

## 5. Заключение

От решените примери се вижда, че при греди с голямо разстояние между страничните опори  $L_c$ , опростената методика е твърде строга, в сравнение с общата. Щом неравенство (2.1) е изпълнено, би следвало гредата да не загуби обща устойчивост, дори и неравенство (1.1) да не е удовлетворено.

При греди с малко разстояние между страничните опори  $L_c$ , винаги, когато е изпълнено неравенство (2.1), е изпълнено и неравенство (1.1).

При греди с близко разположени странични укрепявания е възможно общата методика да се окаже по-строга от опростената.

Определената чрез числени методи (МКЕ) носеща способност на гредата на измятане  $M_{b,Rd,3}$  се явява обвивка на получените чрез други методи стойности на носимоспособности  $M_{b,Rd,1}$  и  $M_{b,Rd,2}$ .

## ЛИТЕРАТУРА:

- [1] prEN 1993-1-1:2002, Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-1: General rules
- [2] EN 1993-1-1:2005, Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings.